図形が通過する範囲

k がすべての実数をとるとき、直線 $2kx+(k^2-1)y+2(k-1)^2=0$ が、通過する範囲を図示せよ。

k がいろいろな値をとれば、直線の傾きも y 切片もいろいろ変化するので、それらすべての直線を１つの座標軸に描き込むと、座標平面が真っ黒に塗り潰される気がしますが、そうはならないというのです。

逆に、直線が例えば $(1, 1)$ を通ると仮定して、そのときの k の値を求めてみましょう。

直線の方程式に $x=1$, $y=1$ を代入すると、

$$2k+(k^2-1)+2(k-1)^2=0$$
$$2k+k^2-1+2k^2-4k+2=0$$
$$3k^2-2k+1=0 \quad , \quad k=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}$$

k は実数なので、この直線は $(1, 1)$ を通ることはできません。

重要　図形の通過する範囲

x , y 以外の文字の２次方程式を作り、$D \geqq 0$

直線の方程式を、k の２次方程式とみて変形します。

$$2kx+(k^2-1)y+2(k-1)^2=0$$
$$2kx+k^2y-y+2k^2-4k+2=0$$
$$(y+2)k^2+2(x-2)k-(y-2)=0 \ \cdots$$

この k の方程式が、実数解をもてばいいので、

(イ) $y \neq -2$ のとき、($y=-2$ のときは、２次方程式でない)

$$D'=(x-2)^2+(y+2)(y-2)=(x-2)^2+y^2-4 \geqq 0$$

(ロ) $y=-2$ のとき

に代入すると、$0+2(x-2)k-(-2-2)=0 \quad \therefore \quad (x-2)k=-2$ となり、$x=2$ のとき、k は存在しない。

（答）　$(x-2)^2+y^2 \geqq 4$　ただし、点 $(2, -2)$ を除く。(図略)