$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ において，α, β が,

$$2\alpha + \beta \leqq 1\ ,\ \alpha \geqq \beta \geqq 0$$

をみたしながら動くとき，点 P の動く範囲を図示せよ。

まず，基本事項の確認をしておきましょう。

$\boxed{\text{重要}}$ $\alpha + \beta = 1 \implies$ 点 P は直線 AB 上を動く

“係数和が 1 のとき，各項の位置ベクトルが表す 2 点を結ぶ直線上を動く”

これの証明を簡単にしておくと，$\beta = 1 - \alpha$ を代入して，

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}}{(1-\alpha)+\alpha}$$

この意味は，点 P は A, B を $AP : PB = 1-\alpha : \alpha$ の比に分けている，つまりは，点 P が直線 AB 上にあることを表します。

$\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ も同時にみたすなら，内分ということになりますから，点 P は線分 AB 上ということになります。

$2\alpha + \beta = 1$ の場合は，次のように変形します。

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = 2\alpha\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + \beta\overrightarrow{OB}$$

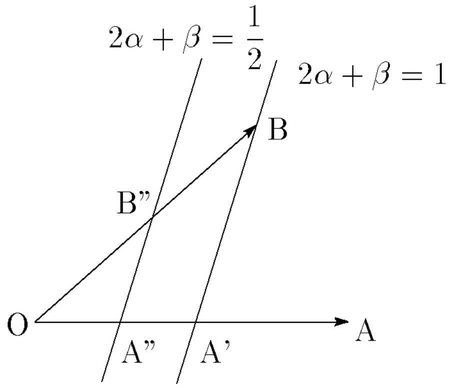
ゆえに，点 P は，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ の終点 A' と B を結ぶ直線上を動きます。

同様に，$2\alpha + \beta = \dfrac{1}{2}$ のときを考えてみましょう。

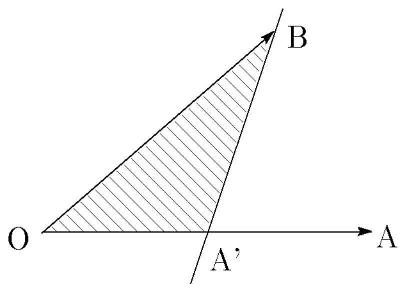
係数和を 1 にするために，両辺を 2 倍して，$4\alpha + 2\beta = 1$ と変形します。

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = 4\alpha\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right) + 2\beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

ゆえに，点 P は，$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ の終点 A'' と $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ の終点 B'' を結ぶ直線上を動きます。



以上のことから，$2\alpha+\beta \leqq 1$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$ のとき，点 P が動く範囲は下のようになることが解かると思います。



今の問題はさらに条件 $\alpha \geqq \beta$ がついています。

$\alpha=\beta$ の場合を考えてみましょう。例えば，$\alpha=\beta=1$ であれば，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ となり，点 P は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の作る平行四辺形のもう一つの頂点 C になります。

$\alpha=\beta=2$ であれば，$\overrightarrow{OP}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ ですから，$2\overrightarrow{OC}$ のところになりますね。

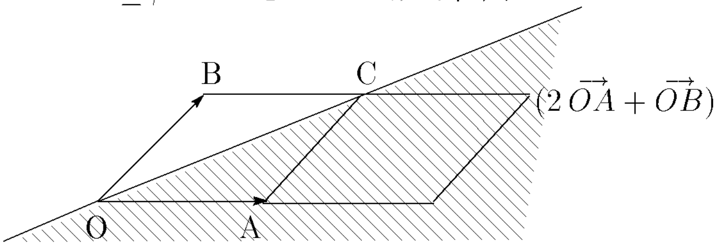
つまり，$\alpha=\beta$ のとき，点 P は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の作る平行四辺形の対角線（および延長）を動きます。

$\alpha \geqq \beta$ も具体的に考えてみましょう。例えば，$\alpha = 2$ ，$\beta = 1$ のとき，

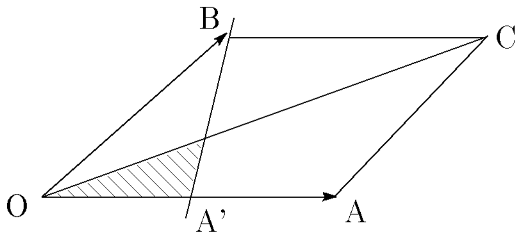
$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ を図示することによって，

$\alpha \geqq \beta$ のとき，P の動く範囲は，下の領域になることがわかります。

$\alpha \geqq \beta$ のときの P の動く範囲



まとめると，$2\alpha + \beta \leqq 1$ ，$\alpha \geqq \beta \geqq 0$ のとき，点 P の動く範囲は次の斜線部になります。

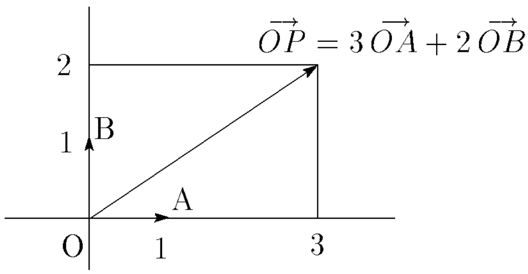


境界を含む

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ に関する今のような問題は，もっと簡単な解き方があります。

理解しやすくするために，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ とします。

例えば，$x=3$，$y=2$ のとき，つまり $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ を，$\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$ として，作図すると，次のようになりますね。

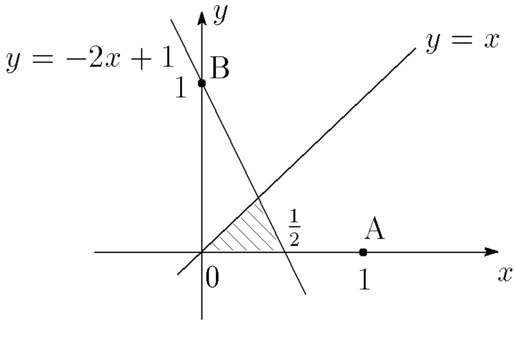


すなわち，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ において，$x=3$，$y=2$ は，xy 直交座標における点 $(3,2)$ に対応します。

ということは，条件 $2x+y=1$ をみたすときの点 P の軌跡は，

$\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$ とした xy 直交座標においては，直線 $2x+y=1$ になるということです。

今の問題の簡単な解き方は，まず，条件 $2\alpha+\beta\leqq 1$，$\alpha\geqq\beta\geqq 0$ を，$2x+y\leqq 1$，$x\geqq y\geqq 0$ と書き換え，xy 座標平面に領域を図示します。



しかる後，前ページの答のような図（斜交座標という）に描きかえるのです。