絶対値のついた関数の定積分

$f(x) = \int_0^1 t\,|\,t-x\,|\,dt$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け。

定積分計算をするために絶対値をはずします。このとき注意すべきことは，被積分関数 $t\,|\,t-x\,|$ を x の関数とみるのか，t の関数とみるのかということです。
今の問題では dt つまり t で積分するので，t の関数とみないといけません。
では，絶対値をはずしましょう。 $g(t)=t|\,t-x\,|$ とします。

$t-x \geqq 0$ ，つまり $t \geqq x$ のとき，

$$t\,|\,t-x\,| = t(t-x) = t^2 - xt$$

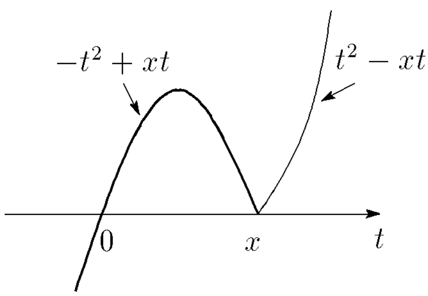
$t-x \leqq 0$ ，つまり $t \leqq x$ のとき，

$$t\,|\,t-x\,| = -t(t-x) = -t^2 + xt$$

次に，この場合分けの結果から $g(t)$ の簡単なグラフを描きます。
どちらも，横軸（t 軸）との交点は $0, x$ ですが，これらの大小の場合分けをせねばなりません。

Ⅰ. $x>0$ の場合

$g(t)$ のグラフは，次のようになります。

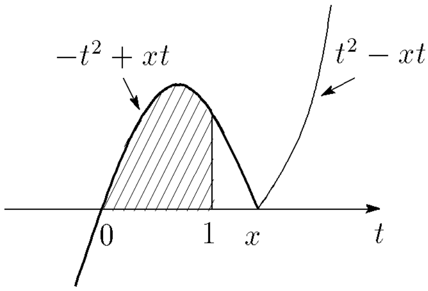


このグラフを参考に，$g(t)$ を，0 から 1 まで，t で積分すればいいのですが…。

積分区間の上端 1 の位置によって，積分式が変わってきます。さらなる場合分けが必要です。

(1) $1 \leqq x$ のとき，

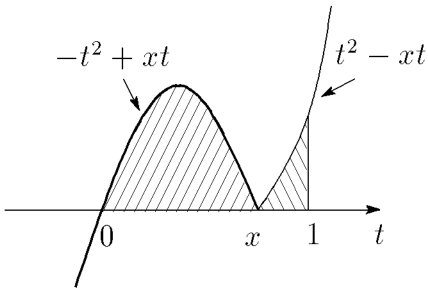
$f(x)=\displaystyle\int_0^1 t\,|\,t-x\,|\,dt$ は下図の斜線部の面積に等しく，



$$f(x)=\int_0^1(-t^2+xt)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{x}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$$

(2) $0<x\leqq 1$ のとき，

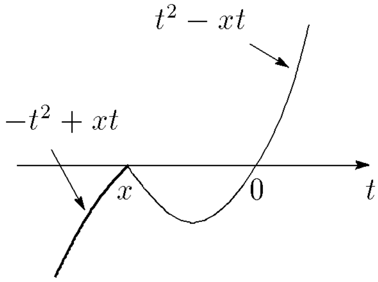
$f(x)=\displaystyle\int_0^1 t\,|\,t-x\,|\,dt$ は下図の斜線部の面積に等しく，



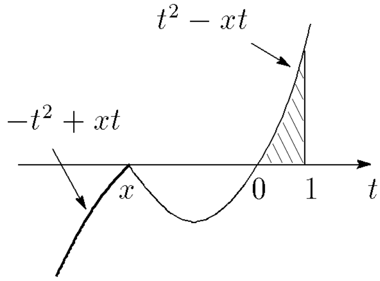
$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_0^x(-t^2+xt)\,dt+\int_x^1(t^2-xt)\,dt\\
&=-\frac{-1}{6}(x-0)^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x}{2}t^2\right]_x^1\\
&=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^x\\
&=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ⅱ. $x<0$ の場合

$g(t)=t\,|\,t-x\,|=\begin{cases} t^2-xt & (\,t \geqq x\,) \\ -t^2+xt & (\,t \leqq x\,) \end{cases}$ のグラフは，次のようになります。



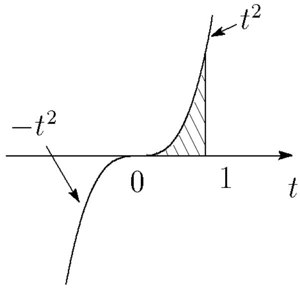
積分区間 $0 \leqq t \leqq 1$ では，$g(t)=t^2-xt$ なので，さらなる場合分けは必要ありません。



$$f(x)=\int_0^1 (t^2-xt)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{x}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$$

Ⅱ. $x=0$ の場合

$$g(t)=t\,|\,t-x\,|=t\,|\,t\,|=\begin{cases} t^2 & (\,t \geqq 0\,) \\ -t^2 & (\,t \leqq 0\,) \end{cases}$$



$$f(x)=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

これは，Ⅱの結果に $x=0$ を代入した値と一致します。

Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ の結果をまとめると

$$f(x)=\int_0^1 t\,|\,t-x\,|\,dt=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} & \cdots ① \quad (\,x \leqq 0\,) \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} & \cdots ② \quad (\,0 \leqq x \leqq 1\,) \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3} & \cdots ③ \quad (\,x \geqq 1\,) \end{cases}$$

フー，ちょっと疲れましたね。まだ続きます。

問題は『 $y=f(x)$ のグラフを描け。』でした。② は３次関数ですから，グラフを描くためには，微分して増減表を作らねばなりません。

$f_2(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ とします。

$f_2'(x)=x^2-\frac{1}{2}$

$f_2'(x)=0$ の $0 \leqq t \leqq 1$ 範囲内の解は $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f_2(x)$ の $0 \leqq t \leqq 1$ での増減表は, 次のようになります。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$\dfrac{1}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{6}$

最後にグラフを描く注意として,

${f_2}'(0) = -\dfrac{1}{2}$ となりますから，$x = 0$ で $f_2(x)$ に引いた接線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ ということです。

これは ① の傾きに等しい。すなわち，① と ② は $x = 0$ で滑らかに接続します。

同様に，${f_2}'(1) = \dfrac{1}{2}$ より，② と ③ は $x = 1$ で滑らかに接続します。

以上の結果から，$y = f(x)$ のグラフは下のようになります。