３次関数の極大値と極小値の差

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3kx$　について，次の問いに答えよ。

(1) 極値をもつときの，k の値の範囲を求めよ。

(2) (1) のとき，極大値と極小値の差を k で表せ。

(3) 極大値と極小値の差が 16 となるような，k の値を求めよ。

(1)

重要　３次関数 $f(x)$ が極値をもつ $\Longleftrightarrow$ $f'(x) = 0$ が異なる２実解をもつ。

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3kx$　を微分する。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 3k$$

$$= 3(x^2 - 4x + k)$$

$f'(x) = 0$　つまり　$x^2 - 4x + k = 0$　が異なる２実解をもてば良いので，

$$D' = 4 - k > 0 \qquad \therefore \quad k < 4$$

(2) $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ の極大値と極小値の差を k で表せ。

【極値の差を対称式の計算で求める解法】

重要 3次関数の極値問題は，解と係数の関係を利用

$f'(x)=0$ つまり $x^2-4x+k=0$ の2つの解を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。

3次関数のグラフはN型でしたから，$x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとります。

$$
\begin{aligned}
\text{極大値}-\text{極小値} &= f(\alpha)-f(\beta)\\
&=\alpha^3-6\alpha^2+3k\alpha-(\beta^3-6\beta^2+3k\beta)\\
&=\alpha^3-\beta^3-6(\alpha^2-\beta^2)+3k(\alpha-\beta)\\
&=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-6(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+3k(\alpha-\beta)\\
&=(\alpha-\beta)\left\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-6(\alpha+\beta)+3k\right\}
\end{aligned}
$$

α, β は $x^2-4x+k=0$ の解でしたから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=4\ ,\ \alpha\beta=k$$

$\alpha-\beta$ や $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ を対称式の変形から求めます。

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16-4k=4(4-k)$$

(1) より， $k<4$ $\therefore$ $4(4-k)>0$

また， $\alpha<\beta$ より， $\alpha-\beta<0$

$$\alpha-\beta=-2\sqrt{4-k}$$

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=16-k$$

これらを先ほどの式に代入して，

$$
\begin{aligned}
\text{極大値} - \text{極小値} &= f(\alpha) - f(\beta) \\
&= (\alpha - \beta)\left\{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 6(\alpha + \beta) + 3k\right\} \\
&= -2\sqrt{4-k}\,(16 - k - 24 + 3k) \\
&= 4\sqrt{4-k}\,(4-k) = 4(4-k)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

(2) $f(x)=x^3-6x^2+3kx$ の極大値と極小値の差を k で表せ。

【極値の差を定積分の計算で求める解法】

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 3k = 0$ つまり $x^2 - 4x + k = 0$ の２つの解を $\alpha, \beta \quad (\alpha<\beta)$ とする。

３次関数のグラフは N 型でしたから，$x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとります。

ここで，定積分の定義式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b)-F(a) \quad \text{より,}$$

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{なのですから,}$$

$$\begin{aligned}\text{極大値} - \text{極小値} &= f(\alpha)-f(\beta)\\ &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\ &= \int_\beta^\alpha (3x^2-12x+3k)\,dx\end{aligned}$$

α, β は，$f'(x)=3x^2-12x+3k=0$ の解ですから，

公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ が使えて，

$$\text{極大値} - \text{極小値} = -\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3 = -\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^3$$

α, β は $x^2-4x+k=0$ の解でしたから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=4\ ,\ \alpha\beta=k$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16-4k=4(4-k)$$

(1) より， $k<4 \quad \therefore \quad 4(4-k)>0$

また， $\alpha<\beta$ より， $\alpha-\beta<0$

$$\therefore \quad \alpha-\beta=-2\sqrt{4-k}=-2(4-k)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\alpha-\beta)^3=-8(4-k)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{極大値}-\text{極小値}=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^3=4(4-k)^{\frac{3}{2}}$$

(3) 極大値と極小値の差が 16 となるような，k の値を求めよ。

極値の差が 16 であることより，

$$4(4-k)^{\frac{3}{2}}=16$$

$$(4-k)^{\frac{3}{2}}=4$$

両辺を $\dfrac{2}{3}$ 乗して，

$$4-k=4^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore \quad k=4-2\sqrt[3]{2}$$

==

(2) の極値の差の求め方は２通りの方法をマスターして下さい。

似たような問題として，極大と極小の中点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$ に関する問題がありますが，それは定積分の利用では解けず，対称式の計算ということになります。