放物線と２接線が囲む面積

$\alpha<\beta$　とする。

放物線　$C: y=x^2$　上の点 $P(\alpha,\alpha^2)$　における接線を l_1，$Q(\beta,\beta^2)$ における接線を l_2，l_1 と l_2 の交点を R とする。

(1) 線分 PQ と放物線 C が囲む面積 S_1 を α,β で表せ。

(2) $\triangle PQR$ の面積 S を α,β で表せ。

(3) C と l_1 と l_2 が囲む面積を S_2 とするとき，$S_1:S_2$ の比の値を求めよ。

(4) $S=2$　であるとき，点 R の軌跡を求めよ。

$y=x^2$　を微分すると，$y'=2x$ であることより，

l_1 の方程式は $y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2=2\alpha x-\alpha^2$ ，同様にして，$l_2: y=2\beta x-\beta^2$

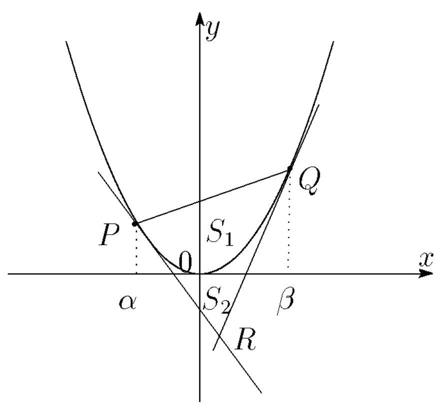
l_1 と l_2 の交点 R を求めると，

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$$
$$x=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

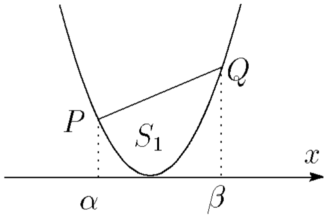
R は l_1 上にあることより，　y 座標は $y=2\alpha\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$

$$\therefore\quad R\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\alpha\beta\right)$$

グラフは次のようになります。



(1) 線分 PQ と放物線 C が囲む面積 S_1 を α, β で表せ。



$P(\alpha, \alpha^2)$ と $Q(\beta, \beta^2)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2 = (\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

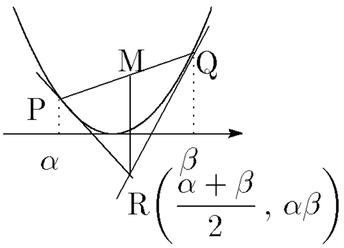
$$S_1 = \int_\alpha^\beta \left\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\right\}dx$$
$$= -\frac{-1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

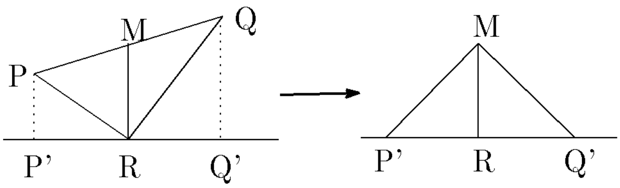
(2) $\triangle PQR$ の面積 S を α, β で表せ。

三角形の面積の求め方はいろいろな方法があります。

ここでは，最も計算が楽と思われる方法で解いてみます。

R を通り y 軸に平行な直線 $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ と，線分 PQ の交点を M とすると，点 M は $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$ の中点であるので，M の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ となります。

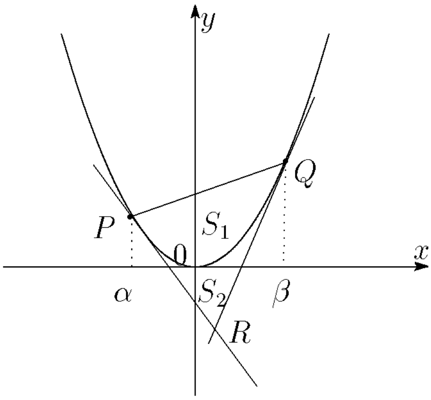




$\triangle PRQ$ の面積は　$\triangle MP'Q'$ の面積に等しい

$$S = \frac{1}{2}P'Q'\cdot MR = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot MR$$
$$= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\alpha\beta\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{2} = \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$$

(3) C と l_1 と l_2 が囲む面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ の比の値を求めよ。



$$S_2 = S - S_1$$
$$= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 : \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$
$$= 2 : 1$$

(4) $S = 2$ であるとき，点 R の軌跡を求めよ。

$$S = \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 = 2 \ , \ (\beta-\alpha)^3 = 8 \quad \therefore \quad \beta - \alpha = 2$$

R の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$ であったので，$R(x, y)$ とすると，

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y = \alpha\beta \end{cases}$$

$\alpha + \beta = 2x \ , \ \alpha\beta = y \ , \ \beta - \alpha = 2$ を

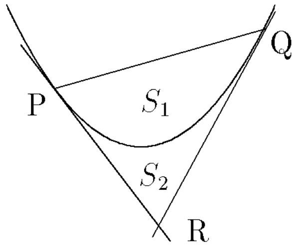
対称式の基本変形式 $(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ に代入する。

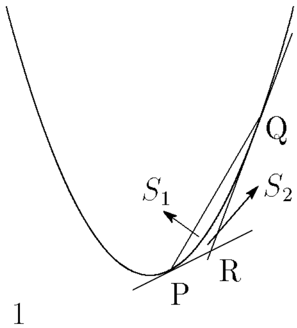
$$4 = 4x^2 - 4y$$

$$\therefore \quad y = x^2 - 1$$

放物線の外部の点から２本の接線を引き，それらが作るいろいろな図形の面積を求めさせるという，近年大流行の問題です。

この問題は $y = x^2$ でしたが，一般の放物線に対しても，下図の面積比は，$S_1 : S_2 = 2 : 1$ となります。





$S_1 : S_2 = 2 : 1$

この定理を知っていると，センター試験などの客観試験では有利です。記述試験では，この問題のように小問による導入という出題形式となりますので，特に三角形 PQR の面積の求め方を押えておかねばなりません。ここで説明した方法以外にも，$\overrightarrow{RP}$ と $\overrightarrow{RQ}$ の作る三角形と解釈しても求まりますし，他にもいろいろな方法があります。

また，点 R の座標は基本対称式で表されることから，この問題のように軌跡の問題と結び付けやすいのも，流行している理由だと思われます。