３次曲線が囲む面積の公式

(1) $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx$ を計算せよ。

(2) $C_1: y=x^3-3x$ と $C_2: y=-2x^2+5x$ が囲む部分の面積を求めよ。

公式 $\displaystyle\int (x+k)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x+k)^{n+1}+C$ を使って計算すると楽です。

これは数学Ⅲの公式なのですが，数学Ⅱの問題でも使って良いという入試数学界の暗黙の了解があるらしく，多くの数学Ⅱの参考書に載っています。

$$
\begin{aligned}
I&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\{(x-\alpha)-(\gamma-\alpha)\}\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\left\{(x-\alpha)^2-(\beta+\gamma-2\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\right\}\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^3-(\beta+\gamma-2\alpha)(x-\alpha)^2+(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(x-\alpha)\right\}\,dx\\
&=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta+\gamma-2\alpha)(x-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta\\
&=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta+\gamma-2\alpha)(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\{3(\beta-\alpha)-4(\beta+\gamma-2\alpha)+6(\gamma-\alpha)\}\\
&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

これでもいいのですが，覚えやすくするために次のように変形してみます。

$$
=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)
$$

一般に x^3 係数を a として，

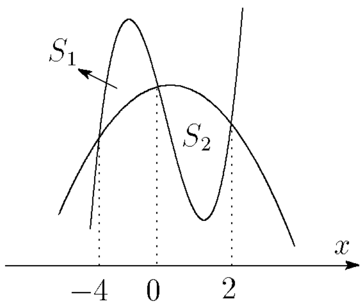
$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)$$

『覚え方』 ２次と同じ・（積分区間の平均値 − 残りの解）

(2) $C_1 : y = x^3 - 3x$ と $C_2 : y = -2x^2 + 5x$ が囲む部分の面積を求めよ。

まず，C_1 と C_2 の交点を求めて，簡単な絵を描きましょう。

$$\begin{aligned} x^3 - 3x &= -2x^2 + 5x \\ x^3 + 2x^2 - 8x &= 0 \\ x(x^2 + 2x - 8) &= 0 \\ x(x-2)(x+4) &= 0 \\ x &= -4\,,\,0\,,\,2 \end{aligned}$$



$$S_1 = \int_{-4}^{0} \left\{x^3 - 3x - (-2x^2 + 5x)\right\}\,dx$$

$$= \int_{-4}^{0} (x^3 + 2x^2 - 8x)\,dx$$

公式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)$

に，$a = 1$，$\alpha = -4$，$\beta = 0$，$\gamma = 2$ を代入

$$= -\frac{1}{6}(0+4)^3\left(\frac{-4+0}{2} - 2\right) = \frac{1}{6}\cdot 4^3 \cdot 4 = \frac{128}{3}$$

$$S_2=\int_0^2\left\{-2x^2+5x-(x^3-3x)\right\}dx$$
$$=\int_0^2(-x^3-2x^2+8x)\,dx$$

公式に $a=-1$, $\alpha=0$, $\beta=2$, $\gamma=-4$ を代入

$$=-\frac{-1}{6}(2-0)^3\left(\frac{0+2}{2}+4\right)=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 5=\frac{20}{3}$$

（答） $S=S_1+S_2=\dfrac{128}{3}+\dfrac{20}{3}=\dfrac{148}{3}$

==

この公式は初めて見た人も多いでしょう。参考書にも載っていないはずです。文字の入った問題でこの公式を使うと，計算結果は因数分解された形で求まります。

ですから，この公式は，特に面積等分の問題に威力を発揮します。

しかし，面積の最大・最小問題では，計算結果が因数分解されているとまずい場合もあります。

そのときは，この公式を使わない方が良いのですが，公式の公式たる所以は計算が楽だということなのですから，取り敢えずは使ってみて，だめなら普通に計算すれば良いでしょう。

教科書に載っていない公式を試験で使って良いのですか？ とよく聞かれるのですが，私はその公式が証明できるのであれば，例え大学で学習する公式であろうが，使って構わないと思います。それに，実際の入試本番では，そんなことを気にしている余裕など無いと思います。