放物線が囲む面積

２つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + ax - a + 3$ と $C_2 : y = \dfrac{1}{2}x^2$ が囲む部分の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a) = 16$ となるときの a の値を求めよ。

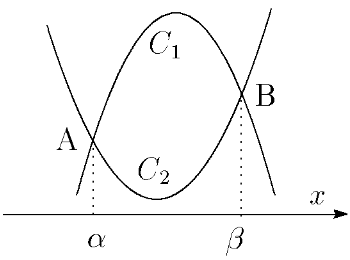
(2) a の値が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。

まず，C_1 と C_2 が交わるときの a の範囲を求めましょう。

$$-x^2 + ax - a + 3 = \frac{1}{2}x^2$$

整理すると，$3x^2 - 2ax + 2a - 6 = 0 \quad \cdots$ ①

$D' = a^2 - 6a + 18 = (a-3)^2 + 9$ となることから，a がどのような値であっても，C_1 と C_2 は異なる２点で交わることが解かります。



面積問題はこのような簡単な絵を描く

① の解を α, β $(\alpha < \beta)$ とする。
つまり，２つの交点を A, B とし，その x 座標を α, β とする。

ここで，後で必要になる $(\beta - \alpha)^3$ を求めておきましょう。

① を解の公式で解き，

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{D'}}{3}, \ \beta = \frac{a + \sqrt{D'}}{3} \quad (D' = a^2 - 6a + 18)$$

を求め,

$$(\beta-\alpha)^3=\left(\frac{a+\sqrt{D'}}{3}-\frac{a-\sqrt{D'}}{3}\right)^3=\left(\frac{2\sqrt{D'}}{3}\right)^3=\frac{8}{27}(D')^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{8}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}$$

として求めても良いし,

方程式 ① $3x^2-2ax+2a-6=0$ の解と係数の関係

$$\alpha+\beta=\frac{2a}{3}\ ,\ \alpha\beta=\frac{2a-6}{3}\quad \text{から,}$$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\frac{4(2a-6)}{3}=\frac{4(a^2-6a+18)}{9}$$

を求め，両辺を $\dfrac{3}{2}$ 乗し,

$$(\beta-\alpha)^3=\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left\{\frac{4(a^2-6a+18)}{9}\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}$$

として求めても構いません。

面積 $S(a)$ は，公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使って求めます。

C_1 の方が，C_2 より上にあることに注意して,

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_\alpha^\beta\left(-x^2+ax-a+3-\frac{1}{2}x^2\right)dx\\&=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{3}{2}x^2+ax-a+3\right)dx\\&=-\frac{-\frac{3}{2}}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{2}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(1) $S(a)=16$ となるときの a の値を求めよ。

$S(a)=\dfrac{2}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}=16$ なのですから，

$(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}=8\times 27$

両辺を $\dfrac{2}{3}$ 乗して，

$a^2-6a+18=(8\times 27)^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(3^3)^{\frac{2}{3}}=4\times 9=36$

$a^2-6a-18=0$ を解いて，$a=3\pm 3\sqrt{3}$

(2) a の値が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。

$y=x^{\frac{3}{2}}$ は，x が増加すれば，必ず y も増加します。

これを y は x の単調増加関数であるといいます。

$S(a)=\dfrac{2}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}}$ では，$a^2-6a+18$ が最小になるとき，$S(a)$ も最小になります。

$$\begin{aligned} S(a)&=\frac{2}{27}(a^2-6a+18)^{\frac{3}{2}} \\ &=\frac{2}{27}\left\{(a-3)^2+9\right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となり，$a=3$ のとき，S は最小値 $\dfrac{2}{27}\cdot 9^{\frac{3}{2}}=2$ をとる。

======================================

放物線の面積に関する問題で，この問題のように，文字が入っていると，

$(\quad A\quad)^{\frac{3}{2}}$ が出てくるのは仕方のないことです。

びっくりして，$(\quad A\quad)^{\frac{3}{2}}=A\sqrt{A}$ と変形したりすると，解けるものも解けません。