

**3次関数と直線が接する条件**

3次曲線  $y = x^3 + ax - 1$  と直線  $y = -x + 1$  が接するときの  $a$  の値を求めよ。

接点を  $P(t, t^3 + at - 1)$  とする。

$y' = 3x^2 + a$  より、点  $P$  における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 + a)(x - t) + t^3 + at - 1 \\ &= (3t^2 + a)x - 2t^3 - 1 \end{aligned}$$

これと、直線  $y = -x + 1$  が一致すれば良いので、

$$\begin{cases} 3t^2 + a = -1 & \dots \text{①} \\ -2t^3 - 1 = 1 & \dots \text{②} \end{cases}$$

② より、 $t^3 = -1$  , 実数解は  $t = -1$

① に代入して、 $a = -3t^2 - 1 = -4$

=====

これは教科書レベルの基本問題なのですが、

$$x^3 + ax - 1 = -x + 1$$

$$x^3 + (a + 1)x - 2 = 0$$

として、この3次方程式が重解をもつ条件を考えてしまう人が多いので、敢えて取り上げました。理論的にはその考え方も正しいし、答も得られるのですが、接線問題の大原則

**重要** 接線問題は接点を  $P(t, f(t))$  とする。

に従って解いた方が解かりやすいし、なにより speedy です。

放物線と直線が接する場合は、右辺を繋いで得られる2次方程式の  $D = 0$  ですから、誤解の無いように。