文字入り２次関数の最大・最小【x^2 係数に文字】

$f(x)=ax^2-2(a-1)x+a$　の　$0 \leqq x \leqq 1$　における最小値を求めよ。

（“ 文字入り２次関数の最大・最小【基本形】”をまず読んでください。）

まず平方完成ですね。数行省略して結果だけ書くと,

$$f(x)=ax^2-2(a-1)x+a=a\left(x-\frac{a-1}{a}\right)^2+2-\frac{1}{a}$$

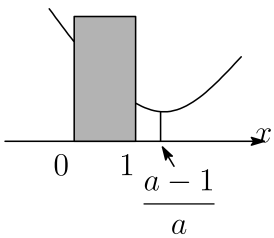
となります。軸（頂点の x 座標）は　$x=\dfrac{a-1}{a}$　です。

軸と定義域の位置関係で例の　～　の絵を描くわけですが，x^2 係数の正負によって，グラフが下に凸か上に凸かが変わってきます。最初にその場合分けが必要になります。

．下に凸（上に開いている）の場合

x^2 係数が正のときですから，$a>0$ の場合です。

軸が定義域の右



絵より　$1 \leqq \dfrac{a-1}{a}$　のときとなりますが，この不等式を解かなければいけません。

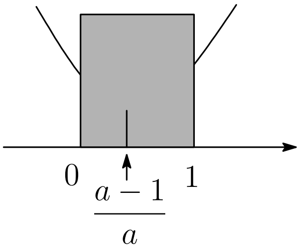
$a>0$ のときを考えているのだから，両辺に a を掛けても不等号の向きは変わりません。

$$a \leqq a-1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq -1$$

となりますが，これは成り立ちません。

$a>0$ のときは，軸が定義域の右にくることはない！ということです。

次の場合分けは，最小値だけを求めるのですから,【基本形】の“　定義域内の右より ”と“　定義域内の左より ”は一つにまとめることができて，“ 軸が定義域内にある場合 ”となります。



絵より $0 \leqq \dfrac{a-1}{a} \leqq 1$

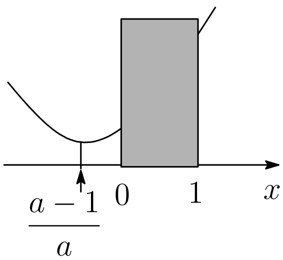
両辺に $a>0$ をかけて，$0 \leqq a-1 \leqq a$

$a-1 \leqq a$ は a が何であっても成立しますから，意味があるのは $0 \leqq a-1$

すなわち“ $a \geqq 1$ のとき ”となります。

このとき，最小値は $f\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=2-\dfrac{1}{a}$ です。

次は“　軸が定義域の左 ”の場合です。



絵より $\dfrac{a-1}{a} \leqq 0$

両辺に $a>0$ をかけて，$a-1 \leqq 0$

$\therefore \quad a \leqq 1$

$a>0$ のときでしたから，場合分けは“ $0<a \leqq 1$ のとき ”となります。

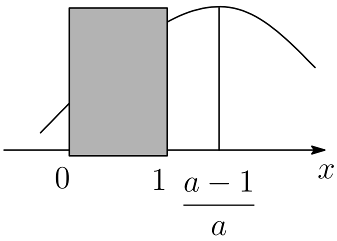
このとき，最小値は $f(0)=a$ ですね。

これで，　．下に凸（上に開いている）の場合 は終わりです。

．上に凸（下に開いている）の場合

x^2 係数が負のときですから，$a < 0$ の場合です。

軸が定義域の右



絵より $1 \leqq \dfrac{a-1}{a}$ のときとなります。

両辺に $a(<0)$ を掛けると不等式の向きが逆転します。

$a \geqq a-1$ となり，これはすべての a で成立します。

$a < 0$ のときは，必ず軸が定義域の右になり，軸が定義域内や軸が定義域の左にくることはあり得ないということです。

（ですから，　．の場合分けはこれだけです。）

最小値は $f(0) = a$ です。

．$a = 0$ の場合

$f(x) = ax^2 - 2(a-1)x + a = 2x$ と１次関数になりますから，

$0 \leqq x \leqq 1$ での最小値は $f(0) = 0$ です。

以上まとめると，答えは次のようになります。

（答）　$a \geqq 1$ のとき，最小値は $f\left(\dfrac{a-1}{a}\right) = 2 - \dfrac{1}{a}$

$a \leqq 1$ のとき，最小値は $f(0) = 0$