

文字入り2次関数の最大・最小【定義域が動く】

$f(x) = -x^2 + 2x + 2$ の $a \leq x \leq a + 2$ における最小値を求めよ。

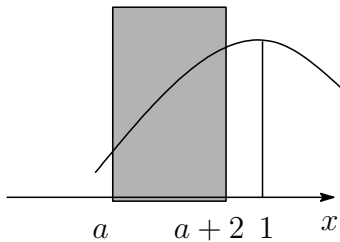
(“文字入り2次関数の最大・最小【基本形】”をまず読んでください。)

2次関数の最大・最小はどんな問題でも平方完成です。

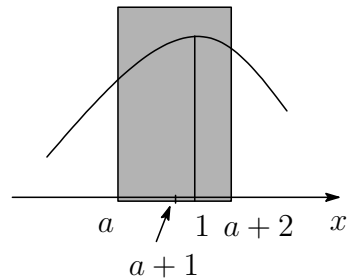
$$f(x) = -x^2 + 2x + 2 = -(x - 1)^2 + 3$$

軸(頂点の x 座標)は $x = 1$ 。この軸と定義域の位置関係の場合分けです。
 x^2 係数が負であることに注意して ~ の絵を描いてから、場合分けを考えます。定義域の中央は $a + 1$ ですね。

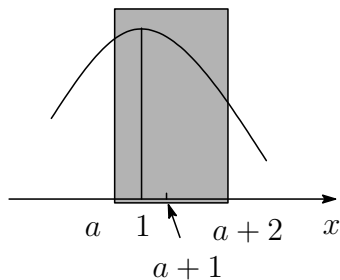
軸が定義域の右



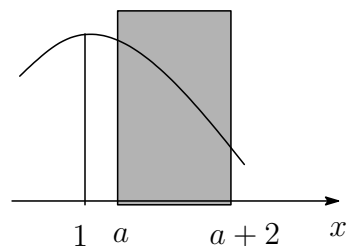
軸が定義域内の右より



軸が定義域内の左より



軸が定義域の左

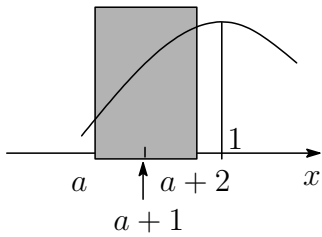


最小値だけを求めるのですから、解答の場合分けは4つもいりません。

と は共に $x = a$ で最小ですからこれを“(イ) 軸が定義域中央より右”
 の場合として、一つにします。

同様に、 と は共に $x = a + 2$ で最小ですからこれを“(ロ) 軸が定義域
 中央より左”の場合として、一つにします。

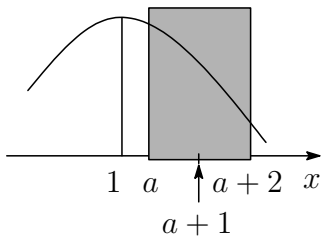
(イ) 「軸が定義域中央より右」 $a+1 \leq 1$ つまり $a \leq 0$ のとき



最小は $x = a$ のとき,

$$f(a) = -a^2 + 2a + 2$$

(ロ) 「軸が定義域中央より左」 $1 \leq a+1$ つまり $a \geq 0$ のとき



最小は $x = a + 2$ のとき,

$$\begin{aligned} f(a+2) &= -(a+2)^2 + 2(a+2) + 2 \\ &= -a^2 - 2a + 2 \end{aligned}$$

【答】 $a \leq 0$ のとき $f(a) = -a^2 + 2a + 2$
 $a \geq 0$ のとき $f(a+2) = -a^2 - 2a + 2$