文字入り２次関数の最大・最小【基本形】

$f(x)=2x^2+ax+a^2$　の　$0 \leqq x \leqq 2$　における最大値・最小値を求めよ。

２次関数の最大・最小問題ですから平方完成します。この程度の平方完成は，１, ２行で出切るように鍛えましょう。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2+ax+a^2 \\
&= 2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+\frac{7}{8}a^2
\end{aligned}
$$

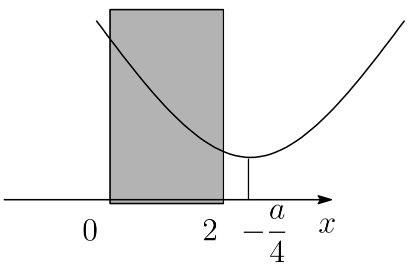
軸の方程式（頂点の x 座標）は，$x=-\dfrac{a}{4}$ です。

さて，グラフを描いて，定義域 $0 \leqq x \leqq 2$　における最大値・最小値を読み取ればいいのですが，a の値によってグラフが動いてしまいます。

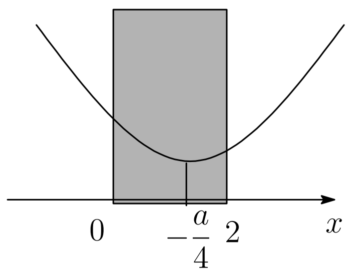
以下の４つの場合分けが必要です。

それぞれの場合で，どこが最大か，最小かを確認して下さい。

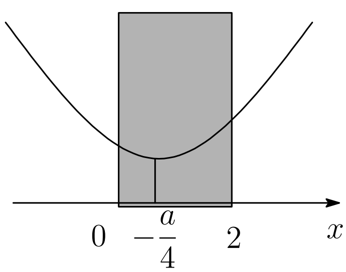
軸が定義域の右



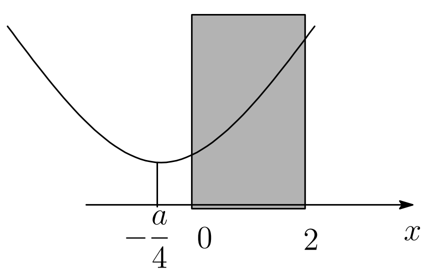
軸が定義域内の右より



軸が定義域内の左より



軸が定義域の左



４つの場合で，最大値・最小値を与える x の値が異なりますね。

更に細かく分ければ,“　　軸が定義域の中央 ”という状態も考えられますが,

実際に問題を解くときには，あまり必要ありません。

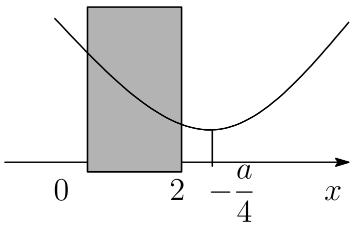
$f(x)=2x^2+ax+a^2=2\left(x+\dfrac{a}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}a^2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値・最小値を求めよ。

実際に場合分けをして解いてみます。

軸が定義域の右

まず，下のような簡単な絵を描きます。軸 $-\dfrac{a}{4}$ が，2 よりも右にある。つまり，$2 \leqq -\dfrac{a}{4}$ の場合だということです。

このままだと，a がどういう範囲か解かりにくいので，この不等式を解いて，“ $a \leqq -8$ のとき ” とします。



最大は $x=0$ のとき，

$f(0)=a^2$

最小は $x=2$ のとき，

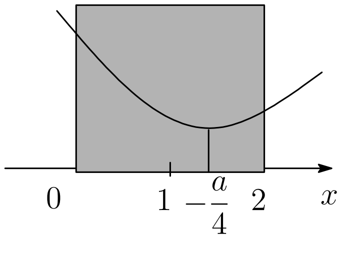
$f(2)=a^2+2a+8$

軸が定義域内の右より

下のような簡単な絵を描きます。“ 定義域内の右より ”とは，定義域の中央（今の問題では 1）よりは右にあるということです。

つまり，軸 $-\dfrac{a}{4}$ が 1 と 2 の間にあるのですから，$1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 2$ というわけです。

この不等式を解いて（各辺に -4 を掛ける），“ $-8 \leqq a \leqq -4$ のとき ”，とします。



最大は $x=0$ のとき，

$f(0)=a^2$

最小は $x=-\dfrac{a}{4}$ のとき，

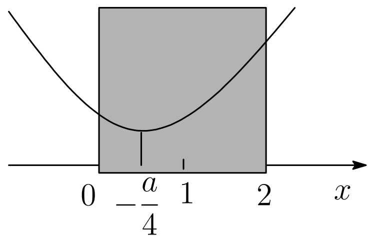
$f(-\dfrac{a}{4})=\dfrac{7}{8}a^2$

軸が定義域内の左より

簡単な絵を描きます。“ 定義域内の左より ”とは，定義域の中央（今の問題では 1）よりは左にあるということです。

つまり，軸 $-\dfrac{a}{4}$ が 0 と 1 の間にあるのですから，$0 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ です。

この不等式を解いて，“ $-4 \leqq a \leqq 0$ のとき ”，とします。



最大は $x = 2$ のとき，

$$f(2) = a^2 + 2a + 8$$

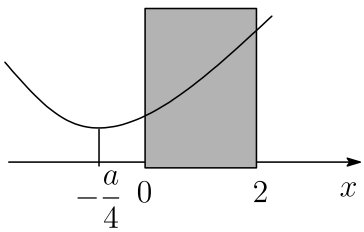
最小は $x = -\dfrac{a}{4}$ のとき，

$$f(-\frac{a}{4}) = \frac{7}{8}a^2$$

軸が定義域の左

絵を描きます。軸 $-\dfrac{a}{4}$ が，0 よりも左にある。

$-\dfrac{a}{4} \leqq 0$, つまり “ $a \geqq 0$ のとき ”となります。



最大は $x = 2$ のとき，

$$f(2) = a^2 + 2a + 8$$

最小は $x = 0$ のとき，

$$f(0) = a^2$$

（答）

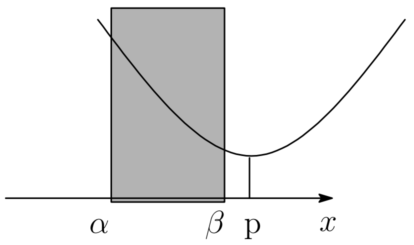
$a \leqq -8$ のとき	最大値 $f(0) = a^2$	最小値 $f(2) = a^2 + 2a + 8$
$-8 \leqq a \leqq -4$ のとき	最大値 $f(0) = a^2$	最小値 $f(-\frac{a}{4}) = \frac{7}{8}a^2$
$-4 \leqq a \leqq 0$ のとき	最大値 $f(2) = a^2 + 2a + 8$	最小値 $f(-\frac{a}{4}) = \frac{7}{8}a^2$
$a \geqq 0$ のとき	最大値 $f(2) = a^2 + 2a + 8$	最小値 $f(0) = a^2$

等号は全部に入れてもいいのですか？とよく聞かれるのですが，入試問題を解く上ではこれで影響ありません。学校の定期試験は，学校の先生に合わせておいてください。

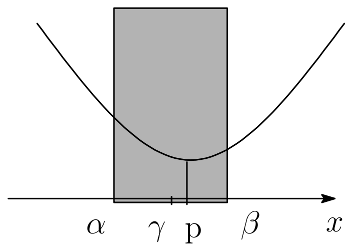
まとめ

文字の入った２次関数の最大・最小は，軸 $x=p$ と定義域 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の位置関係で，下図の４つの場合分けをするのが基本です。
γ は定義域の中央の値です。

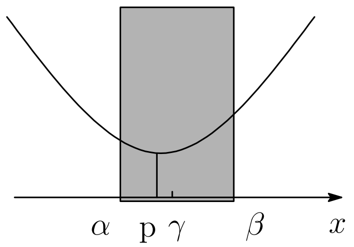
軸が定義域の右



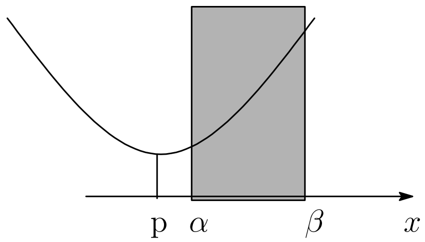
軸が定義域内の右より



軸が定義域内の左より



軸が定義域の左



「最小値のみ」を求める問題は，　と　は共に頂点で最小ですから，ひとつにまとめて，

(イ) $p \geqq \beta$　　　(ロ) $\alpha \leqq p \leqq \beta$　　　(ハ) $p \leqq \alpha$

の３つ場合分けで済みます。

「最大値のみ」を求める問題は，　と　は共に $x=\alpha$ で最大，　と　は共に $x=\beta$ で最大ですから，

(イ) $p \geqq \gamma$　　　(ロ) $p \leqq \gamma$

の２つの場合分けで済みます。

注意　以上は，放物線が下に凸，つまり x^2 係数が正のときです。x^2 係数が負のときは，上に凸の放物線で　〜　の絵を描き，同様に考えます。