2008 年大学入試センター試験　数学②　(数学 II・数学 B　第１問〜第４問)　解答例

第 1 問

〔1〕 真数条件から $x > \boxed{0}$　　また，$(*)$ を変形して $5^y = \boxed{3} \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$

$5^y = 3z - 1 > 0$ から $z > \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$　　また，$K = \dfrac{3 \cdot 3^{\log_{10} x} - 1}{3} + \dfrac{1}{3^{\log_{10} x}} = z + \dfrac{\boxed{1}}{z} - \dfrac{1}{\boxed{3}}$

ここで，$z > 0$, $\dfrac{1}{z} > 0$ から相加・相乗平均の関係により　$z + \dfrac{1}{z} \geqq 2\sqrt{z \cdot \dfrac{1}{z}} = 2$

等号成立は $z = \dfrac{1}{z}$ のときで，$z > 0$ から，$z = 1$　ゆえに，$z = \boxed{1}$ のとき，最小値 $2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$ をとる.

このとき，$1 = 3^{\log_{10} x}$ から，$\log_{10} x = 0$　$\therefore x = \boxed{1}$, $5^y = 3 \cdot 1 - 1$　$\therefore\ y = \log_{\boxed{5}} \boxed{2}$

〔2〕

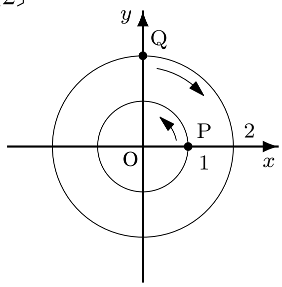


図 1

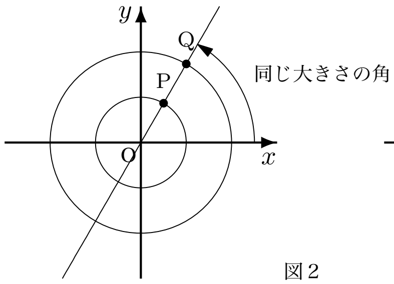


図 2

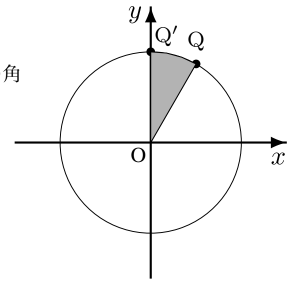


図 3

(1)

$\mathrm{P}(\cos a\theta,\ \sin a\theta)$　$\mathrm{Q}\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right)\right)$　より，

$\theta = \pi$ のとき，点 Q の座標は $\left(2\sin\dfrac{\pi}{6},\ 2\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$ $\therefore\ (\sqrt{\boxed{3}},\ \boxed{1})$

(2) $\theta \geqq 0$ であることから θ が増加するにつれて，点 P は点 $(1,\ 0)$ から正の向き，点 Q は点 $(0,\ 2)$ から負の向きに動く.

３点 O, P, Q が一直線上にあるのは（図２参照）x 軸正の向きと OP, OQ のなす角が一致するとき.

ゆえに最小の θ は $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3} = a\theta$ を満たし，これを θ について解いて，$\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{6}a + \boxed{2}}\pi$

また求める面積は図３における扇形の面積であるので，$\angle\,\mathrm{Q'OQ}$ の大きさが $\dfrac{\theta}{3}$ であることに注意して

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{6a+2}\pi\right) \cdot 2^2 = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}a + \boxed{1}}\pi$

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right) = \sin\dfrac{\theta}{3}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right) = \cos\dfrac{\theta}{3}$ より

$\mathrm{PQ}^2 = \left(2\sin\dfrac{\theta}{3} - \cos a\theta\right)^2 + \left(2\cos\dfrac{\theta}{3} - \sin a\theta\right)^2 = 5 - 4\left(\sin\dfrac{\theta}{3}\cos a\theta + \cos\dfrac{\theta}{3}\sin a\theta\right)$

$= 5 - 4\sin\left(\dfrac{\theta}{3} + a\theta\right) = \boxed{5} - \boxed{4}\sin\left(\dfrac{\boxed{3}a + \boxed{1}}{\boxed{3}}\theta\right)$

(4) $f(x) = 5 - 4\sin\left(\dfrac{3a+1}{3}x\right)$ の周期は $\dfrac{2\pi}{\frac{3a+1}{3}} = \dfrac{6\pi}{3a+1}$

ゆえに，$\dfrac{6\pi}{3a+1} = 4\pi \iff 3a + 1 = \dfrac{3}{2}$　$\therefore\ a = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$

第 2 問

(1) $\dfrac{1}{8}x^2 = -x^2 + 3ax - 2a^2 \iff 9x^2 - 24ax + 16a^2 = 0 \iff (3x - 4a)^2 = 0 \ \therefore\ x = \dfrac{4}{3}a$

$\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2 = \dfrac{2}{9}a^2$　したがって，点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}a,\ \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{9}}a^2\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}x$ より，点 P における接線の方程式は，$y - \dfrac{2}{9}a^2 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{3}a\left(x - \dfrac{4}{3}a\right)$

$\therefore\ \ y = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}ax - \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{9}}a^2$

(2) $f(x) = 0$ の解は $x = 0$，$x \geqq 0$ において，$f(x) \geqq 0$ であるから，$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{24}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$

$g(x) = 0 \iff x^2 - 3ax + 2a^2 = 0 \iff (x - a)(x - 2a) = 0 \iff x = a,\ 2a$

ゆえに，x 座標は$\boxed{a}$, $\boxed{2a}$

$a > 0$ より $a \leqq x \leqq 2a$ で $g(x) \leqq 0$ から，面積 $\displaystyle -\int_a^{2a}(x - a)(x - 2a)dx = \frac{(2a - a)^3}{6} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}a^3$

(3) $0 < a \leqq \boxed{1}$ のとき

(2) で求めた C_1, x 軸，$x = 2$ で囲まれた部分（A_1 とおく）から C_2, x 軸で囲まれた部分を除けばよいから，$S(a) = -\dfrac{1}{6}a^3 + \dfrac{1}{3}$　これは $a > 0$ で単調減少であるから最小値は $S(1) = \dfrac{1}{6}$

$1 < a \leqq \boxed{2}$ のとき

A_1 から，C_2, x 軸，$x = 2$ で囲まれた部分を除けばよいから，$\displaystyle S(a) = \frac{1}{3} - \int_a^2(-x^2 + 3ax - 2a)dx$

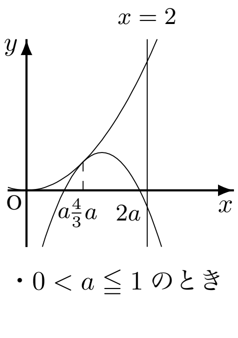
$= -\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}a^3 + \boxed{4}a^2 - \boxed{6}a + \boxed{3}$　　$S'(a) = -\dfrac{5}{2}a^2 + 8a - 6 = -\dfrac{1}{2}(5a - 6)(a - 2)$

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↘	$\frac{3}{25}$	↗	

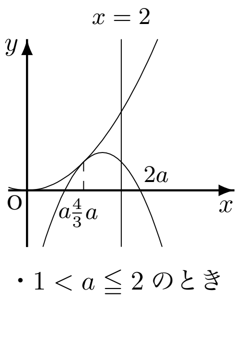
増減表は左のようになるから，$1 < a \leqq 2$ において最小値は $\dfrac{3}{25}$

$2 < a$ のとき　A_1 の面積であるから，$S(a) = \dfrac{1}{3}$ で一定

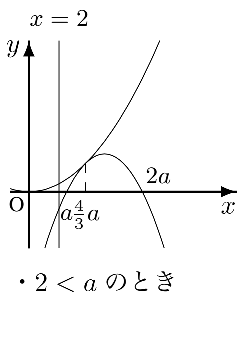
以上のことから，$a = \dfrac{\boxed{6}}{\boxed{5}}$ のときで最小値 $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{25}}$ をとる.



・$0 < a \leqq 1$ のとき



・$1 < a \leqq 2$ のとき



・$2 < a$ のとき

第 3 問

(1) $a_n = 7 + (n-1)(-4) = \boxed{-4}n + \boxed{11}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-4k+11) = -\frac{4}{2}n(n+1) + 11n = \boxed{-2}n^2 + \boxed{9}n$

(2) $b_{n+1} - 2b_n = p(n+1)^2 - q(n+1) - r - (pn^2 - qn_r) = -pn^2 + (2p+q)n + p - q + r$

これを $-2n^2 + 9n$ と比較して $\begin{cases} -p = -2 \\ 2p + q = 9 \\ p - q + r = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p = \boxed{2} \\ q = \boxed{5} \\ r = \boxed{3} \end{cases}$

ゆえに $b_n = 2n^2 - 5n - 3$ であるから，$b_1 = 2 - 5 - 3 = \boxed{-6}$

② と① の差をとると $(c_{n+1} - b_{n+1}) - 2(c_n - b_n) = 0 \quad \therefore\ d_{n+1} - \boxed{2}d_n = 0$

$d_1 = c_1 - b_1 = 7$ 　よって $\{d_n\}$ は初項 7，公比 2 の等比数列であるから，$d_n = 7 \cdot 2^{n-1}$

ゆえに $c_n - b_n = 7 \cdot 2^{n-1} \iff c_n = \boxed{7} \cdot \boxed{2}^{n-1} + 2n^2 - 5n - 3$

$$\sum_{k=1}^{n}(7 \cdot 2^{k-1} + 2k^2 - 5k - 3) = \frac{7(2^n - 1)}{2-1} + \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - 3n$$

$$\therefore\ \boxed{7} \cdot \boxed{2}^n + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}n^3 - \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2 - \frac{\boxed{31}}{\boxed{6}}n - \boxed{7}$$

第 4 問

(1) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \mathrm{AB}^2 = (\sqrt{3})^2 = \boxed{3}$ 　より

$|\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3 \iff 4 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

同様にして，$|\vec{b} - \vec{c}| = (\sqrt{2})^2$, $|\vec{c} - \vec{a}| = (\sqrt{3})^2$ から，$\vec{b} \cdot \vec{c} = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = \boxed{1}$

(2) 線分 AB を $s : (1-s)$ に内分する点を P とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおけて，

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{a} = (1-s)|\vec{a}|^2 + s\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 2(1-s) + \dfrac{1}{2}s - 1 = 0 \quad \therefore\ s = \dfrac{2}{3}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{b} - \vec{c}$

点 P は線分 AB を $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{3}$ に内分するから，$1 : \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \dfrac{2}{3}|\vec{b}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{b} = \boxed{0}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = \dfrac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \dfrac{4}{9}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \dfrac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \dfrac{4}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \dfrac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{5}{3} \quad \therefore |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{3}}$

CP は OA, OB に垂直であるから，三角形 OAB に垂直（したがって③）

$\angle$ AOB$= \theta$ とすれば，$\cos\theta = \dfrac{2 + 2 - 3}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}$

ゆえに $\sin\theta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ となり，三角形 OAB の面積は $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$

四面体の体積は $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{3} = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{12}}$