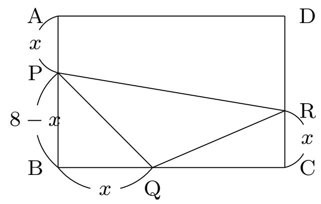
2008 大学入試センター試験　数学①（数学 I・数学 A）　解答例

第1問

〔1〕



台形の公式から $\frac{1}{2}(\mathrm{PB}+\mathrm{RC})\times\mathrm{BC}=\frac{1}{2}(8-x+x)\times 12=\boxed{48}$

$\triangle$ PBQ の面積は $\frac{(8-x)x}{2}$，$\triangle$ DQC の面積は $\frac{x(12-x)}{2}$

よって，$S=48-\frac{8x-x^2}{2}-\frac{12x-x^2}{2}=x^2-\boxed{10}x+\boxed{48}$

$S<24$ より $x^2-10x+24<0 \iff (x-4)(x-6)<0 \iff \boxed{4}<x<\boxed{6}$

〔2〕p は r であるための $\boxed{①}$

$p \Longrightarrow r$ は偽（反例　$m=1,\ n=3$）　$p \Longleftarrow r$ は真

$\bar{p}$ は $\bar{r}$ であるための $\boxed{②}$

$\bar{p}$ は $\bar{r} \Longleftrightarrow r$ ならば p（対偶と元の命題の真偽は同じ）

これは上の命題の逆であるから十分条件のみを満たす

「p かつ q」は r であるための $\boxed{⓪}$

「p かつ q」$\Longrightarrow r$ は真　「p かつ q」$\Longleftarrow r$ も真

「p または q」は r であるための $\boxed{①}$

「p または q」$\Longrightarrow r$ は偽（反例　$m=1,\ n=4$）　「p または q」$\Longleftarrow r$ は真

第2問 $6=a(-2)^2-b(-2)-a+b \iff 6=3a+3b \iff b=-a+\boxed{2}$

よって，$y=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}-a+b=a\left(x-\frac{-a+2}{2a}\right)^2+\frac{-(3a-2)^2}{4a}$

となり，頂点は $\left(x-\frac{-a+\boxed{2}}{\boxed{2}a},\ \frac{-(\boxed{3}a-\boxed{2})^2}{\boxed{4}a}\right)$

$\frac{-(\boxed{3}a-\boxed{2})^2}{\boxed{4}a}=-2 \iff (\boxed{3}a-\boxed{2})^2=8a \iff \boxed{9}a^2-\boxed{20}a+\boxed{4}=0$

ゆえに，これを解けば $(a-2)(9a-2)-0$　$\therefore a=\boxed{2},\ \frac{\boxed{2}}{\boxed{9}}$

このとき，① は $y=\frac{2}{9}(x-4)^2-2$ となり，頂点の x 座標は $\boxed{4}$.

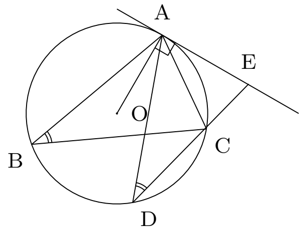
また，$\frac{2}{9}(x-4)^2-2=0 \iff (x-4)^2=9 \iff x-4=\pm 3 \therefore a=\boxed{7},\ \boxed{1}$ （$\boxed{1}$, $\boxed{7}$ も可）

$0\leqq x\leqq 9$ より，軸は定義域内にあるから $x=\boxed{4}$ のとき最小値 $\boxed{-2}$

$x=9$ が $x=0$ より軸から遠いから，$x=\boxed{9}$ で最大値 $\frac{\boxed{32}}{\boxed{9}}$ をとる.

第 3 問

余弦定理から $CA^2 = 7^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4\sqrt{2}\cos 45^\circ = 25$　よって，CA= $\boxed{5}$



また正弦定理から外接円の半径を R とすると，$2R = \dfrac{5}{\sin 45^\circ}$

$\therefore\ R = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{2}}$　$\angle$ ADC= $\angle$ ABC= $\boxed{45}^\circ$（共通弧に対する円周角）より

$\triangle$ ADC で余弦定理から $5^2 = (\sqrt{10})^2 + x^2 - 2\sqrt{10}x\cos 45^\circ$

$\therefore\ x^2 - \boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}x - \boxed{15} = 0$

$(x - 3\sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$ より，$x > 0$ から AD= $x = \boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}$

$\triangle$ ACE と $\triangle$ DAE において，$\angle$ E は共通で，接弦定理から $\angle$ EAC= $\angle$ ABC= $\angle$ ADE であるからこの２つの三角形は相似．（ゆえに $\boxed{①}$ と $\boxed{②}$）

相似な三角形で相対する辺の比は一定であるから，EC:EA=AC:AD= $5 : 3\sqrt{5}$

したがって，EA= $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}\sqrt{\boxed{5}}$ EC　方べきの定理から，EA^2 =ED·EC（ゆえに，$\boxed{⑤}$）

CD= $\sqrt{10}$ より，ED=EC+ $\sqrt{10}$ から上の２式より，EA= $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{4}}\sqrt{\boxed{2}}$　面積は $\dfrac{1}{2}\cdot$AE·AC$\sin 45^\circ = \dfrac{\boxed{75}}{\boxed{8}}$

第 4 問

(1) AAA となるのは，1 または 2 の目が 3 回連続で出ればよいから，$2 \times 2 \times 2 = \boxed{8}$ 通り．

AB となるのは，1 回目 5 または 6，2 回目 1 または 2，3 回目 3 または 4 が出ればよいから，$2 \times 2 \times 2 = \boxed{8}$ 通りである．

(2) 1 回目の「A」,「B」,「何も書かない」，２回目以降の「A」,「B」,「右の文字を消去する」のいずれも起こる確率は $\dfrac{1}{3}$

以下,「何も書かない」や「右の文字を消去する」を「×」と書く．

文字が A となるのは　××A　B×A　A×A　AA×　BA×　の 5 通り　いずれも確率は $\dfrac{1}{27}$ より，$\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{27}}$

何も書かれていないのは　×××　×A×　×B×　A××　B××　の 5 通りで上と同様に $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{27}}$

(3) 文字の字数が 3 となるのは，5 と 6 がでないとき．ゆえに $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{27}}$

文字の字数が 2 となるのは，初めに 5 か 6 がでて，あとは 1 から 4 までのいずれかがでる場合であるから，

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{\boxed{4}}{\boxed{27}}$

確率分布は右のようになる．

X	3	2	1	0	計
p	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{5}{27}$	1

ゆえに，期待値は $3 \times \dfrac{8}{27} + 2 \times \dfrac{4}{27} + 1 \times \dfrac{10}{27} + 0 \times \dfrac{5}{27} = \dfrac{42}{27} = \dfrac{\boxed{14}}{\boxed{9}}$