2007　大学入試センター試験　数学① (数学I・数学A)　解答例

第1問

[1]

(1) $x < \dfrac{5}{3}$ のとき $3x-5<0$ より① を変形して，$2(x^2-4x+4) = -3x+5$

$2x^2-5x+3=0$ $(2x-3)(x-1)=0$ $\therefore x = \boxed{1},\ \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$

(2) $x \geqq \dfrac{5}{3}$ のとき方程式① は $2(x^2-4x+4) = 3x-5$ となり

$2x^2-11x+13=0$ $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-4\cdot 2\cdot 13}}{4} = \dfrac{11\pm\sqrt{17}}{4}$

ここで，$\dfrac{11}{4} > \dfrac{5}{3}$ より $\dfrac{11+\sqrt{17}}{4} > \dfrac{5}{3}$

$\dfrac{11-\sqrt{17}}{4} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{13-3\sqrt{17}}{12} = \dfrac{\sqrt{169}-\sqrt{153}}{12} > 0$

から，$\dfrac{11\pm\sqrt{17}}{4}$ は条件を満たす．(1) より，① の解は$\boxed{4}$個ある．

最大のものは $\dfrac{11+\sqrt{17}}{4}$ であり，$4<\sqrt{17}<5$ から $15 < 11+\sqrt{17} < 16$

ゆえに $3 < \dfrac{15}{4} < \alpha < 4$　したがって，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は$\boxed{3}$である．

[2]

(1) k を自然数とする

A に属する数 n は，$n = 10k = 2\cdot 5k$ と書けて，n は2で割り切れる．

逆に2で割り切れる数4は10の倍数ではない．よって十分条件であるから，$\boxed{②}$

B に属する数8は20の倍数ではない．逆に n を20で割り切れる数とすれば，$n = 20k = 4\cdot 5k$ と書けるので n は4の倍数．

したがって必要条件であるから，$\boxed{①}$

(2) 集合 C は20の倍数の集合であり，A と B の共通部分であるから，$\boxed{④}$

集合 D は A にも B にも属さない数の集合である．よって，A または B に属する数の集合 $A\cup B$ の補集合であるから，$\boxed{③}$

集合 E は集合 C の補集合である．よって，$\boxed{⑦}$

第 2 問 (1) $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4 = \{x-(a-1)\}^2 - (a-1)^2 + 2a^2 - 8a + 4$

$= \{x-(a-1)\}^2 + a^2 - 6a + 3$ と変形できるから，頂点の座標は $\left(a - \boxed{1},\ a^2 - \boxed{6}a + \boxed{3}\right)$

グラフ G は下に凸の放物線であるから，x と異なる 2 点で交わるのは $a^2 - 6a + 3 < 0$ のとき

$a^2 - 6a + 3 = 0$ を解くと，$a = 3 \pm \sqrt{6}$　　ゆえに，$\boxed{3} - \sqrt{\boxed{6}} < a < 3 + \sqrt{6} \cdots$ Ⓐ

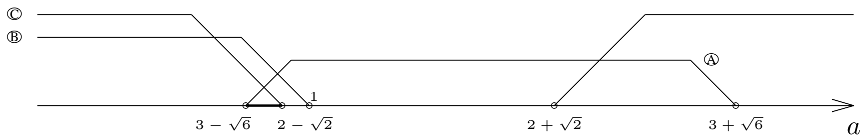
$f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4$ とおくと，二つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

Ⓐ かつ軸の位置から $a - 1 < 0 \cdots$ Ⓑ かつ y 切片が正より $f(0) > 0 \cdots$ Ⓒ

Ⓑ より $a < 1$，Ⓒ から $a^2 - 4a + 2 < 0 \therefore\ \ a < 2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2} < a$

ここで，$2 - \sqrt{2} - (3 - \sqrt{6}) = \sqrt{6} - (1 + \sqrt{2})\ (\sqrt{6})^2 - (1 + \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2 > 0$

であり，$\sqrt{6} > 0$ から，$2 - \sqrt{2} > 3 - \sqrt{6}$



ゆえに，求める範囲は $\boxed{3} - \sqrt{\boxed{6}} < a < \boxed{2} - \sqrt{\boxed{2}}$

(2) 頂点の x 座標は $a - 1$ であるから，$3 \leqq a - 1 \leqq 7$　$\therefore$　$\boxed{4} \leqq a \leqq \boxed{8}$

$a = 6$ のとき，$M = f(3) = f(7)$

ゆえに，$4 \leqq a \leqq \boxed{6}$ のとき

$M = f(7) = \boxed{2}a^2 - \boxed{22}a + \boxed{67}$

$6 \leqq a \leqq \boxed{8}$ のとき,

$M = f(3) = \boxed{2}a^2 - \boxed{14}a + \boxed{19}$

である.

軸は区間 $3 \leqq x \leqq 7$ にあるから，最小値は $f(a-1) = a^2 - 6a + 3$

$a^2 - 6a + 3 = 6$　$a^2 - 6a - 3 = 0$　$\therefore$　$a = 3 \pm 2\sqrt{3}$

$4 \leqq a \leqq 8$ であり，$1 < \sqrt{3} < 2$ より $5 < a < 7$ から $a = \boxed{3} + \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$

$M = 2(3 + 2\sqrt{3})^2 - 14(3 + 2\sqrt{3}) + 19 = \boxed{19} - \boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}$

第 3 問 (1) 余弦定理から $\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{2^2+(\sqrt{5}+1)^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{2(1+\sqrt{5})}{4(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \angle\mathrm{ABC} < 180^\circ$ より，$\angle\mathrm{ABC} = \boxed{60}^\circ$ 外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$2R = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \quad \therefore R = \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\sqrt{\boxed{6}}$

(2) $\angle\mathrm{BAD} = \theta$ とおくと，$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{AD}\sin\theta$，$\angle\mathrm{ABD} + \angle\mathrm{BCD} = \boxed{180}^\circ$ から

$S_2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\cdot\mathrm{CD}\sin(180^\circ-\theta) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\cdot\mathrm{CD}\sin\theta$

ゆえに，$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}} = \sqrt{5}-1$

$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \quad \therefore \mathrm{CD} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\mathrm{AD}$ このとき $\angle\mathrm{ADC} = 120^\circ$ であり，

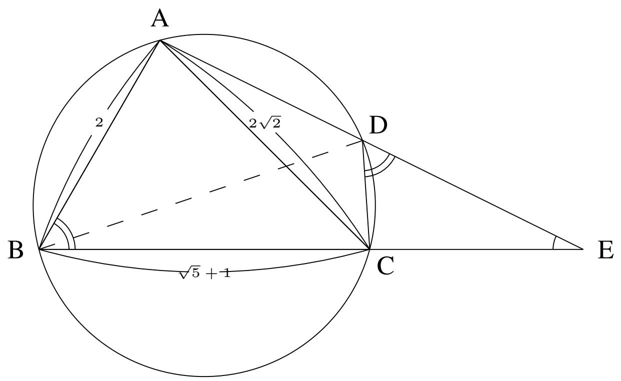
$\mathrm{CD} = x$ とし，△ ACD に余弦定理を用いて $(2\sqrt{2})^2 = x^2 + (2x)^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cos 120^\circ$

$8 = x^2 + 4x^2 + 2x^2$ $x > 0$ より，$x = \mathrm{CD} = \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{7}}\sqrt{\boxed{14}}$

△ ABE と△ CDE は相似であり，相似比は $2 : \dfrac{2}{7}\sqrt{14}$ であるから，

$S_3 : S_4 = 2^2 : \left(\dfrac{2}{7}\sqrt{14}\right)^2 = 7 : 2$ ゆえに，$\dfrac{S_3}{S_4} = \dfrac{\boxed{7}}{\boxed{2}}$

$S_3 = S_1 + S_2 + S_4$ であり，$\dfrac{7}{2}S_4 = (\sqrt{5}-1)S_2 + S_2 + S_4 \quad \therefore \dfrac{S_2}{S_4} = \dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$



第４問 (1) １，２，３回目にそれぞれ $x,\ y,\ z$ の目が出るとする．

３回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を１周してちょうど頂点 A に到達する目の出し方は，
$x+y+z=6$ のときである．自然数３個を加えて６になる組み合わせは，
ⓐ$1+1+4$, ⓑ$1+2+3$, ⓒ$2+2+2$ のいずれかであり，３数の並べ方は
ⓐ${}_3C_2=3$（通り）　ⓑ$3!=6$（通り）　ⓒ1（通り）であるから
求める数は，$3+6+1=\boxed{10}$（通り）
最初に６以外の目がでるのは５（通り）．A 以外の頂点から A 以外の頂点に動くのは５（通り）であるから，一度も頂点 A にとまらないのは
$5\times5\times5=\boxed{125}$（通り）

(2) ① 頂点 A から頂点 A に動く・・・１通り
② 頂点 A から A 以外の頂点に動く・・・５通り
③ A 以外の頂点から頂点 A に動く・・・１通り
④ A 以外の頂点から A 以外の頂点に動く・・・5 通り

さいころの目の出方は全部で $6^3=216$（通り）である．
３回とも頂点 A にとまるのは，① が３回起こるとき．よって，$\dfrac{1\times1\times1}{216}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{216}}$
頂点 A にとまることを○，そうでないものを×とする．
ちょうど２回だけ頂点 A にとまるのは

	１回目	２回目	３回目	
（あ）	○	○	×	①，①，②$\cdots1\times1\times5=5$ 通り
（い）	○	×	○	①，②，③$\cdots1\times5\times1=5$ 通り
（う）	×	○	○	②，③，①$\cdots5\times1\times1=5$ 通り

（あ）～（う）のいずれかが起こるときであるから，$\dfrac{5+5+5}{216}=\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{72}}$
ちょうど１回だけ頂点 A にとまるのは

	１回目	２回目	３回目	
（え）	○	×	×	①，②，④$\cdots1\times5\times5=25$ 通り
（お）	×	○	×	②，③，②$\cdots5\times1\times5=25$ 通り
（か）	×	×	○	②，④，③$\cdots5\times5\times1=25$ 通り

（え）～（か）のいずれかが起こるときであるから，$\dfrac{25+25+25}{216}=\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{72}}$

(3) (1)，(2) より，点 P が頂点 A にとまる回数を X とすると，確率分布は次のようになる．

X	0	1	2	3	計
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	1

ゆえに期待値は，$0\cdot\dfrac{125}{216}+1\cdot\dfrac{75}{216}+2\cdot\dfrac{15}{216}+3\cdot\dfrac{1}{216}=\dfrac{25+10+1}{72}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$