2007 年センター試験 数学 I・A, 数学 II・B 講評

桜木 “Joseph Henri” 整一
[ʒɔzɛf ɑ̃ʁi]
vingt huit deux mill sept
le 28 janvier 2007
[lə vɛ̃t ɥit ʒɑ̃vjɛ dœ mil sɛt]

評価基準

計算力	(易) □□□ から ■■■ (難) の 4 段階評価
発想力	(易) ○○○ から ●●● (難) の 4 段階評価
易・標準・難	ここ数カ年のセンター試験との比較

1　数学 I・A

1.1　第 1 問

第 1 問 [1]	絶対値付き 2 次方程式
難易度	発想力○○○, 計算力■□□, 易

まず [1] が $\alpha = \dfrac{11+\sqrt{17}}{4}$ および無理数の大小関係 $4 < \sqrt{17} < 5$ から, $3 < \dfrac{11+4}{4} < \dfrac{11+\sqrt{17}}{4} < \dfrac{11+5}{4} = 4$ の関係がよめるかがポイントである。

第 1 問 [2]	集合
難易度	発想力●○○, 計算力□□□, 易

センター試験で集合が陽に扱うというのはかなり珍しいが、de Morgan の法則が使えるかどうかだけ。

1.2　第 2 問

第 1 問 [2]	集合
難易度	発想力○○○, 計算力■■□, 標準

この問題の一番厄介な点は, $2-\sqrt{2}$ と $3-\sqrt{6}$ の大小評価である。$2-\sqrt{2} = 0.5857\cdots$, $3-\sqrt{6} = 0.5505\cdots$ とその差がわずか $0.0352\cdots$ というかなりきわどい問題であった。

この問題では大小関係を次の手法で評価することを考えてみる。

1. 荒い評価法: $1 < \sqrt{2} < 2$ かつ $2 < \sqrt{6} < 3$ より, $0 < 2-\sqrt{2} < 1$, $0 < 3-\sqrt{6} < 1$ となる。(使えない)

2. 近似値を暗記する: $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.414$, $\sqrt{6} \fallingdotseq 2.449$ より, $2-\sqrt{2} \fallingdotseq 0.586$, $3-\sqrt{6} \fallingdotseq 0.551$ なので, $3-\sqrt{6} < 2-\sqrt{2}$. これが一番現実的かも知れない。

1.3 第 3 問

第 3 問	三角比・平面図形の融合
難易度	(1): 発想力○○○, 計算力■□□, 易 (2): 発想力●●●, 計算力■■□, 難

(2) の前半戦はかなり際物である。

- まず, 内接四角形 ABCD の対角 A, C について (i) $\sin A = \sin C$, (ii) $\cos A = -\cos C$ が使えるかどうか。
- $x = \mathrm{AD}$, $y = \mathrm{CD}$, $A = \angle\mathrm{BAD}$ とおくと, $S_1 = x \sin A$, $S_2 = \frac{1}{2}y(\sqrt{5}-1)\sin A$ と, 問題文にある $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5}-1$ を連立させる。すると $x = 2y$ つまり $\mathrm{AD} = 2\mathrm{CD}$ が見えて来るというかなり際物。
- 更に, 内接四角形を 1 つの対角線 BD で分割させるだけでなく, 上の結果をもう一つの対角線 AC に分割して, △ACD について余弦定理を使えるかどうか。

という代物なので, 図形の処理能力がないとまともに回答への糸口すら見えてこない代物である。

(2) の後半戦は, △ABE ∽ △CDE が読めるかどうかが勝敗ラインである。これは「方べきの定理が自力で証明できる」または「△ABE と △CDE は (i) ∠E は共通, (ii) 内接四角形の外対角より ∠ABE = ∠CDE。よって二角相当より相似」が見抜けたら突破できるという感じである。問題なのは, 「最後の と より」と書いてあるが, では S_1 と S_2 の関係, では S_3 と S_4 の関係しか書かれていない。ここで, 「S_2, S_4 を S = 四角形 ABCD を用いて表せるかどうか」にかかったかなり問題作である。

この部分の筆者の回答方法は,

$$\text{より},\ S_1 = (\sqrt{5}-1)S_2,\ S = S_1 + S_2 = (\sqrt{5}-1)S_2 + S_2 = \sqrt{5}S_2.\ \therefore\ S_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}S$$

$$\text{より},\ S_3 = \frac{7}{2}S_4,\ S = S_3 - S_4 = \frac{7}{2}S_4 + S_4 = \frac{5}{2}S_4.\ \therefore\ S_4 = \frac{2}{5}S$$

$$\therefore\ \frac{S_2}{S_4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}S}{\frac{2}{5}S} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

1.4　第 4 問

第 4 問	三角比・平面図形の融合
難易度	(1), (2) のカ〜ケ: 発想力●○○, 計算力□□□, 易 (2) のコ以降, (3): 発想力●●●, 計算力■■□, 難

(1)〜(2) の最初のマーク欄までは一気に持っていけるが, そこから先が読めないケースが続発したのではないか。サイコロ 3 個を使った題材はよくあるが, 今回の問題は数え間違いが非常に起きやすかった問題である。

ただ, このサイコロを 3 回投げる試行が, 条件に合う出る目そのものは変わるものの, 条件に合う出る目の個数は全く同じなので, 反復試行を見抜ければ完全に楽が出来る。(thanks to ちえぞう先生)

2　数学 II・B

2.1　第 1 問

第 1 問 [1]	三角関数
難易度	発想力○○○, 計算力■□□, 易 【祝】センター試験初の弧度法

本当に標準的な問題。3〜5 分以内に終わらせたい。

第 1 問 [2]	対数関数
難易度	発想力○○○, 計算力■□□, 易

$\log_{\sqrt{y}} 3$, $\log_y \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ という見慣れない形だが, 誘導が丁寧である。最後の領域の図示だが, 選択肢には xy 平面上に数値が一切書かれていないので「自分で領域を書いて, 照合する」方が楽。

2.2　第 2 問

第 2 問	微分法・積分法
難易度	発想力○○○, 計算力■■□, 標準

(2) 学習指導要領の数学 II では「積分する関数は 2 次関数まで」と次数の制限とあるが, $f(x)$ も $g(x)$ も 3 次関数でそれを積分すると思いきや, $g(x) - f(x)$ が 2 次関数という, 学習指導要

領の裏をかいた問題でもある。3 次関数だと 1/6 公式 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\mathrm{d}x = -(1/6)(\beta-\alpha)^3$ が使えないと思っても実は使えてしまう問題であった。

また, (2) の最後の設問で唐突に $\tan\theta$ が出てくるが, $\tan\alpha = f'(0)$, $\tan\beta = g'(0)$ とおいて, 2 直線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ なす角 θ の正接 $\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$ を求めるという問題だった。

2.3 第 3 問

第 3 問	数列
難易度	発想力●●○, 計算力■■■, 難

全体的に, 配点 20 の割には計算が極めてハードで強引な式変形が要求される。

(1) いきなり隣接 2 項間漸化式をノーヒントで解かされるのは珍しいのではないか。ただ, これは単なる計算問題である。ただ, $\boxed{\text{エ}}$〜$\boxed{\text{ク}}$ (合計配点 4) は捨ててしまっても後に全く影響しない。

(2) $2b_n + c_n = dn$, $b_n - 2c_n = xr^{n-1}$ から「連立方程式の加減法」を使って, b_n, c_n ではなく, $b_n + c_n$ を求めるというかなり「ダーティー」な問題。

(3) これも「連立方程式の加減法」を使って解く問題ではあるが, a_n の式が 2 回目以降の回答欄が細い明朝体で書かれているのに大分助けられている。ただし, 計算が正確かつスピーディーに処理できたかが勝敗を分けたと思われる。

ここは, (2), (3) では正確かつ高速な文字式処理能力が要求される。

2.4 第 4 問

第 4 問	空間ベクトル
難易度	発想力●○○, 計算力■■□,

空間ベクトルからの出題だが, 使う道具は, 「内分点」「直交条件」「3 点が同一直線上にあるための条件」だけ。計算量は多いが, 手詰まりになる局面は少ないと思われる。

また, 負号 “−” の出題頻度が多く, 最初の問題だけでも, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-3a-(1-a), -a-a, 1-3a-a)$ と負号の計算処理には要注意。

正直な話, 今回の問題はベクトル→数列という順序なら平均点も多少は上がったと思われる。